УДК 519.6

Статистическое обоснование энтропийных закономерностей в моделях управления технологическими процессами

О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

Записано выражение для энтропии технологического процесса Показан механизм необратимости технологических явлений. Объяснен закон возрастания энтропии технологического процесса. Получены условия энтропийной устойчивости для макропараметров технологического процесса.

Ключевые слова: *энтропия, технологический процесс, необратимость, закон возрастания энтропии.*

Записано вираз для ентропії технологічного процесу. З'ясовано механізм незворотності технологічних явищ. Пояснено закон зростання ентропії технологічного процесу. З використанням поняття ентропії технологічного процесу отримані умови стійкості для макропараметрів технологічного процесу.

Ключові слова: *ентропія, технологічний процес, незворотність, закон зростання ентропії.*

The expression for entropy of technological process is obtained. The mechanism of irreversibility of the technological phenomena is found. The law of growth of technological process entropy is explained. The conditions of stability for makroparameters of technological process are got using the concept of technological process entropy.

Key words: *entropy, process, irreversibility, the law of entropy.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Классические определения устойчивости движения основаны на детерминированных характеристиках системы [1,2]. Для стохастических систем, к которым относятся производственно-технические системы со случайными параметрами и характеристиками технологических процессов изготовления продукции [3,4], критерии устойчивости движения необходимо строить на вероятностных оценках. Большинство авторов идет по пути построения вероятностных аналогов устойчивости по Ляпунову, формулируя статистические определения критериев устойчивости [5,6]. При этом ключевым вопросом является выбор функции Ляпунова. Известно, что в качестве функции Ляпунова для сложной стохастической производственно-технической системы может быть принята энтропия системы [7]. В связи с этим актуальными являются исследования энтропийных закономерностей в моделях технологических процессов, основанных на модельных представлениях о характере взаимодействия предметов труда с технологическим оборудованием и между собой, позволяющих обосновать возрастание энтропии производственно-технической системы при отклонении от статистического равновесия.

2. Истоки исследования авторов

Настоящая работа опирается на энтропийный подход построения модели управления макропараметрами технологического процесса [7], обеспечивающий их связь с параметрами, описывающими состояние большого количества отдельных элементов производственно-технической системы.

3. Нерешенные проблемы и цели работы

На важность применения энтропийных методов в процессах управления большими системами указал Дж.Фон Нейман. Энтропийный подход в описании технологических процессов детально рассмотрен Б.Н.Петровым [7]. Известно, что качестве функции состояния технологического процесса возможно ввести некоторую функцию - энтропию, характеризующую меру его неопределенности [7,8,9], которая может быть записана через функцию распределения предметов труда по микросостояниям $ч(t,S,м)$[7]:

$$H_{\Omega}(t,S) = \int_0^{\infty} ч(t,S,м) \cdot \ell n\left(\frac{e}{ч(t,S,м)}\right) d\mu , \qquad (1)$$

где S и μ соответственно усредненные по бесконечно малой ячейке фазового технологического пространства $\Delta\Omega$ характеристики состояния предметов труда S_j, μ_j, представляющие затраты, перенесенные на предмет труда и интенсивность переноса технологических ресурсов на предмет труда. Однако в рассмотренных работах не уделено внимание модельным представлениям о характере взаимодействия предметов труда с технологическим оборудованием и между собой, на основе которых может быть получено выражение для функции распределения предметов труда по микросостояниям $ч(t,S,м)$.

Целью настоящей работы является статистическое обоснование энтропийных закономерностей в моделях технологических процессов, основанное на модельных представлениям о характере взаимодействия предметов труда с технологическим оборудованием и между собой.

4. О законе возрастания энтропии технологического процесса

Общие закономерности большинства установившихся технологических процессов известны [3,4]. Разным технологическим процессам соответствуют разные уравнения состояния [7, 10]. Движение по технологическому маршруту предметов труда, задается динамическими балансовыми уравнениями переноса [10, 11, 12], описывающими эволюцию в пространстве и времени макропараметров технологического процесса в масштабе принятого усреднения значений микропараметров предметов труда. Колебания значений микропараметров предмета труда при технологической обработки определяют поведение макроскопических величин технологического процесса и, что особенно важно, участвуют в формировании необратимого процесса. При изменении макроскопического состояния технологического процесса возникает переходной процесс, микропараметры предметов труда изменяются [7,11]. Изменение состояния предметов труда может быть осуществлено вследствие совершения работы над ними, определяется кинетическим уравнением технологического процесса [12]

$$\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial t}+\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial S}\;\mu+\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial\mu}\;f(t,S)=$$

$$=\lambda(t,S)\cdot\left\{\int\limits_0^\infty\psi(t,S,\mu)\cdot\tilde{\mu}\cdot\chi(t,S,\tilde{\mu})d\tilde{\mu}-\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\right\},\qquad(2)$$

$$\text{ч}(t,S,0)=0\,,\qquad\qquad \text{ч}(t,S,\infty)\to 0\,.$$

Производственная функция обобщенной единицы технологического оборудования $f(t,S)$ задается способом производства. Оборудование воздействует на предмет труда, изменяя его качественно и количественно. Учитывает вероятностный характер воздействия технологического оборудования на предмет труда функция $\psi(t,S,\mu)$, определяющая вероятность того, что после воздействия технологического оборудования на предмет труда скорость переноса затрат станет равной μ. Определим моменты $[\psi]_k(t,S)$ и $[\chi]_k(t,S)$ функции $\psi(t,S,\mu)$ и $\text{ч}(t,S,\text{м})$ следующими выражениями:

$$\int\limits_0^\infty\psi(t,S,\mu)d\mu=1\,,\qquad \int\limits_0^\infty\mu^k\cdot\psi(t,S,\mu)d\mu=[\psi]_k(t,S)\,,\quad k=1,2....\qquad(3)$$

$$\int\limits_0^\infty\chi(t,S,\mu)d\mu=[\chi]_0(t,S)\,,\qquad \int\limits_0^\infty\mu^k\cdot\chi(t,S,\mu)d\mu=[\chi]_k(t,S)\,.\qquad(4)$$

Если функция $\psi(t,S,\mu)$ не зависит от состояния предметов труда до испытания воздействия со стороны технологического оборудования, то уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial t}+\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial S}\cdot\;\mu+\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial\mu}\cdot\;f(t,S)=$$

$$=\lambda(t,S)\cdot\{\psi(t,S,\mu)\cdot[\chi]_1(t,S)-\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\}\,.\qquad(5)$$

Используя (5), изменение энтропии технологического процесса со временем может быть определено

$$\frac{dH_\Omega}{dt}=\frac{d}{dt}\int\limits_0^\infty\text{ч}(t,S,\text{м})\cdot\ell\text{n}\left(\frac{e}{\text{ч}(t,S,\text{м})}\right)d\mu=$$

$$=-\int\limits_0^\infty\lambda(t,S)\cdot\{\psi(t,S,\mu)\cdot[\chi]_1(t,S)-\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\}\cdot\ell\text{nч}(t,S,\text{м})d\mu\qquad(6)$$

Состояние статистического равновесия полностью симметрично относительно замены будущего настоящим. При изменении знака времени надо переставить состояния до воздействия и после воздействия технологического оборудования на предмет труда. Мы можем, следовательно, утверждать, что в состоянии статистического равновесия число взаимодействий продуктов труда с технологическим оборудованием $\mu\cdot\chi(t,S,\mu)$ при переходе в состояние $\psi(t,S,\mu)\cdot[\chi]_1(t,S)$ (прямой процесс) равно числу взаимодействий предметов с технологическим оборудованием $\psi^*\left(t,S,\mu^*\right)\cdot[\chi]^*{}_1(t,S)$ при переходе в состояние $\mu^*\cdot\chi^*\left(t,S,\mu^*\right)$ (обратный процесс). Правую часть уравнения (6), которая описывает прямой процесс при переходе предмета труда в состояние $\psi(t,S,\mu)\cdot[\chi]_1(t,S)$, обозначим $J_{pr}(t,S)$. Если провести замену $\mu\cdot\chi(t,S,\mu)$ на $\mu^*\cdot\chi^*\left(t,S,\mu^*\right)$ и $\psi(t,S,\mu)\cdot[\chi]_1(t,S)$ на $\psi^*\left(t,S,\mu^*\right)\cdot[\chi]^*{}_1(t,S)$, то для обратного процесса можно записать

$$J_{obr}(t,S)=-\int_0^\infty\lambda(t,S)\cdot\left\{\psi^*\left(t,S,\mu^*\right)\cdot[\chi]^*{}_1(t,S)-\mu^*\cdot\chi^*\left(t,S,\mu^*\right)\right\}\cdot\ell\mathrm{n}\left(\frac{\psi^*\left(t,S,\mu^*\right)\cdot[\chi]^*{}_1(t,S)}{\mu^*}\right)d\mu. \quad (7)$$

В итоге правую часть уравнения (6) можно представить в следующем виде:

$$J(t,S)=-\frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty\lambda(t,S)\cdot\{\psi(t,S,\mu)\cdot[\chi]_1(t,S)-\mu\cdot\chi(t,S,\mu)\}\cdot\ell\mathrm{n}ч(t,S,\mu)d\mu-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty\lambda(t,S)\cdot\left\{\psi^*\left(t,S,\mu^*\right)\cdot[\chi]^*{}_1(t,S)-\mu^*\cdot\chi^*\left(t,S,\mu^*\right)\right\}\cdot\ell\mathrm{n}\left(\frac{\psi^*\left(t,S,\mu^*\right)\cdot[\chi]^*{}_1(t,S)}{\mu^*}\right)d\mu. \quad (8)$$

Используя соотношения

$$\mu^*=-\mu\ ,\ \chi^*\left(t,S,\mu^*\right)=\chi(t,S,\mu),[\chi]^*{}_1(t,S)=-[\chi]_1(t,S),\ \psi^*\left(t,S,\mu^*\right)=\psi(t,S,\mu). \quad (9)$$

интеграл (6) запишем окончательно в виде:

$$\frac{dH_\Omega(t,S)}{dt}=-\frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty\lambda(t,S)\psi(t,S,\mu)\cdot[\chi]_1(t,S)*$$

$$*\left\{1-\frac{\mu\cdot\chi(t,S,\mu)}{\psi(t,S,\mu)\cdot[\chi]_1(t,S)}\right\}\cdot\ell\mathrm{n}\frac{ч(t,S,\mu)\cdot\mu}{\psi(t,S,\mu)\cdot[\chi]_1(t,S)}d\mu\geq 0. \quad (10)$$

Подынтегральное выражение, а следовательно и весь интеграл положителен. Действительно, величина $\lambda(t,S)\cdot\psi(t,S,\mu)\cdot[\chi]_1(t,S)$ положительна по определению. Функция же вида $(1-y)\cdot\ell\mathrm{n}y$ отрицательна при всех $y>0$, поскольку $\ell\mathrm{n}y>0$ при $y>1$ и $\ell\mathrm{n}y<0$ при $y<1$. Таким образом, мы приходим к закону возрастания энтропии для технологического процесса. Равенство выполняется только для квазистатических процессов, когда макропараметры технологического процесса находятся в состоянии установившегося равновесия:

$$\frac{dH_\Omega(t,S)}{dt}=0\ . \quad (11)$$

5. Необратимость технологических явлений

Функция распределения $ч(t,S,м)$ характеризует степень неполноты задания микросостояний ансамбля предметов труда. При этом возможно выделить два предельных случая. Первый случай соответствует максимальной неопределенности состояния предметов труда, а второй случай - полному динамическому описанию изменения параметров состояния предметов труда технологического процесса, при котором неопределенность состояния предметов труда равна нулю. Между этими предельными случаями есть огромное множество различных вариантов функционирования технологического процесса, соответствующих той или иной степени неопределенности его состояния. Для неравновесных технологических процессов различные степени неопределенности производственно-технической системы соответствуют различным стадиям релаксационных процессов.

Основным фактором, приводящим к необратимости технологических явлений, является неустойчивость (расходимость) технологических траекторий предметов труда [12] в результате взаимодействия с технологическим оборудованием и между собой. Впервые на роль неустойчивости движения и фактора перемешивания в возникновении необратимости явлений указал Н.С. Крылов. Для оценки меры неустойчивости динамической системы из N-объектов А.Н. Колмогоров ввел специальную характеристику, получившую название энтропии Крылова-Колмогорова или К-энтропии. Для технологического процесса К-энтропия определяется формулой

$$k(t)=\frac{1}{t}\cdot\ln\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{N}\left(\Delta S_j(t)\right)^2}\Bigg/\sqrt{\sum_{j=1}^{N}\left(\Delta S_j(0)\right)^2}\right),\quad \left(j=1,2,.....,N\right) \tag{15}$$

Если движение предметов труда по технологическому маршруту является асимптотически устойчивым, то $\lim\limits_{t\to\infty}\Delta S_j(t)\to 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty}k(t)\to 0$.

Таким образом, необратимость явлений при движении предметов труда по технологическому маршруту заключается во взаимодействии предметов труда с технологическим оборудованием. Траектории движения предметов труда в фазовом технологическом пространстве (S,μ) после взаимодействия с технологическим оборудованием оказываются непредсказуемыми. Становится возможным лишь статистическое предсказание. При этом важным является нахождение наиболее вероятных значений параметров технологического процесса.

6. Критерии энтропийной устойчивости параметров технологического процесса

Одним из основных вопросов при построении моделей технологических процессов является вопрос устойчивости. Хорошо известно, что влияние малых возмущающих факторов на поведение производственно-технической системы будет не одинаковым для различных технологических процессов. На одни технологические процессы это влияние незначительно, так как возмущенное состояние мало отличается от невозмущенного. Напротив, на других технологических процессах влияние возмущений сказывается весьма значительно, как бы ни были малы возмущающие воздействия. Так как возмущающие факторы всегда существуют неизбежно, то становится понятным, что задача устойчивости технологического процесса приобретает очень важное теоретическое и практическое значение.

Если для динамической производственно-технической системы в окрестности невозмущенного состояния его параметров возможно найти знакоопределенную функцию $V(t,\xi)\geq 0$, полная производная которой по времени $\dfrac{dV(t,\xi)}{dt}\leq 0$ есть функция также знакоопределенная, знака, противоположного с $V(t,S)$, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически [1]. Причем знаки равенства возможны только при $\xi=0$.

Возьмем в качестве функции Ляпунова $V(t,\xi)$ разность между значениями энтропии технологического процесса в невозмущенном $H_\Omega(t,S_0)\big|_0$ и возмущенном $H_\Omega(t,S)$ состояниях:

$$V(t,\xi)=-\left(H_\Omega(t,S)-H_\Omega(t,S_0)\big|_0\right),\ \xi=S-S_0,\ \frac{dV(t,\xi)}{dt}=-\frac{dH_\Omega(t,S)}{dt}\leq 0,\qquad(16)$$

где $H_\Omega(t,S_0)\big|_0$ - значение энтропии технологического процесса в невозмущенном состоянии, обозначенном символом $\big|_0$.

Функция Ляпунова $V(t,\xi)$ (16) выражается через функцию распределения предметов труда по микросостояниям *ч(t,S,м)*. Функция Ляпунова (16) достигает минимума, если выполняется условие

$$\psi(t,S,\mu)\cdot[\chi]_1(t,S)-\mu\cdot\chi(t,S,\mu)=0,\qquad(17)$$

определяющее равновесную функцию распределения предметов труда по микросостояниям в ходе их движения по технологическому маршруту

$$\chi(t,S,\mu)\big|_0=[\chi]_1(t,S)\cdot\frac{\psi(t,S,\mu)\big|_0}{\mu},\qquad(18)$$

при котором кинетическое уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial t}+\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial S}\cdot\mu+\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial\mu}\cdot f(t,S)=0.\qquad(19)$$

Исследование на устойчивость параметров технологического процесса свелось к определению условия знакоопределенности функции $V(t,\xi)$

$$V(t,\xi)=-\left(H_\Omega(t,S_0)\big|_0+\frac{\partial H_\Omega(t,S)}{\partial S}\bigg|_0\cdot\xi+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_\Omega(t,S)}{\partial S^2}\bigg|_0\cdot\xi^2+.....-H_\Omega(t,S_0)\big|_0\right).\qquad(20)$$

В силу того, что в состоянии статистического равновесия (11) линейные слагаемые равны нулю, форма (20) принимает вид

$$V(t,\xi)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_\Omega(t,S)}{\partial S^2}\bigg|_0\cdot\xi^2.\qquad(21)$$

Откуда условия энтропийной устойчивости параметров технологического процесса

$$\frac{\partial^2 H_\Omega(t,S)}{\partial S^2}\bigg|_0<0,\qquad(22)$$

определяет параметры потока энтропии вдоль технологического маршрута для невозмущенного состояния макропараметров технологического процесса. Используя известный вид функции $\psi(t, S, \mu)$, который определяется проектными данными технологического процесса и используемого оборудования, неравенство (21) может быть выражено через макропараметры технологического процесса [3,10, 12].

7. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

В статье обоснованы энтропийные закономерности в моделях технологических процессов, основанные на модельных представлениях о характере взаимодействия предметов труда с технологическим оборудованием и между собой. Воспользовавшись понятием энтропии технологического процесса [7], доказан закон возрастания энтропии для технологического процесса замкнутой производственно-технической системы. Получены условия энтропийной устойчивости макропараметров технологического процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А.М. Общая задача устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950, - 395 с.
2. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения – М.: Наука, 1966. - 531 с.
3. Первозванский А.А. Математические методы в управлении производством. - М.: Наука, 1975. - 616с.
4. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. - М.: Наука,1978-356 с.
5. Красовский А.А. Статистическая теория переходных процессов. - М.: Наука,1968. -240 с.
6. Пугачев В. С., Казаков И. Е., Евланов Л. Г. Основы статистической теории автоматических систем. М.: Машиностроение, 1974. 400 с
7. Петров Б.Н., Уланов Г.М., Гольденблат И.И., Ульянов С.В. Теории моделей в процессах управления (Информационный и термодинамический аспекты). - М.: Наука, 1978. - 224с.
8. Вильсон А.Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем: Пер.с англ.- М.:Наука, 1978г. - 248с.
9. Прангишвили И.В. Энтропийные и другие системные закономерности: Вопросы управления сложными системами / И.В. Прангишвили; Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова. – М.: Наука, 2003. – 428 с
10. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия. - М.: Прогресс, 1961. 341 с.
11. Власов В.А., Тихомиров И.А., Локтев И.И. Моделирование технологических процессов изготовления промышленной продукции. – Изд. Томского политехнического университета, 2006. – 300 с.
12. Пигнастый О.М. Статистическая теория производственных систем. – Х.: Изд. ХНУ им. В.Н. Каразина, 2007. – 388 с.

Надійшла – 21.11.2012.